O halde $g(k) \geq q-1+2^k-1 = 2^k \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$ alt sınır elde edilir.

Pillai ve Dickson (Rubadungay, Niven ve arkadaşları)

$g(k)$ değeri için k üzerinden koşullu formülleri verildi.

Theorem 3.1. $3^k = 2^k q + r$, $0 < r < 2^k$ ve $q = \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor$ olmak üzere

$r \leq 2^k - q - 3$ ise

$$g(k) = 2^k + \lfloor (\tfrac{3}{2})^k \rfloor - 2$$

sağlanır.

$r \leq 2^k - q - 3$] Pillai - Dickson koşulu

Bu koşulun yeterince büyük $\forall k \gg$ için sağlandığı Mahler tarafından 1957 yılında gösterildi.

! Roth-Ridout Teorimi kullanarak bunu gösterdi.

Roth-Ridout Teorimi: $\alpha \neq 0$ bir cebirsel sayı olsun. $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sonlu tane birbirinden farklı asal sayı olsun. Bu durumda sonlu tane $(e_1, e_2, \ldots, e_s)$ $e_0 \neq 0$ olacak şekilde $(s+1)$'lisi vardır ki

$$0 < |p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s} - e_0 \alpha| < e^{-\varepsilon E} \quad \text{eşitsizliği}$$

$E = \max\limits_{1 \leq j \leq s} |e_j|$ için sağlanır.

Mahler (1957). $\alpha = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ için Roth-Ridout teoremi uygulanırsa $e_0 = q+1$, $e_1 = -k$, $e_2 = k$ olmak üzere

$$0 < |(\tfrac{3}{2})^k - (q+1)| < e^{-\varepsilon \cdot k}$$

eşitsizliği sonlu tane (e_0, e_1, e_2) için geçerli olacaktır. Dolayısıyla, yeterince büyük her k değeri için

$$|3^k - (q+1)2^k| \geq 2^k \cdot e^{-\varepsilon k}$$

Bu ise $|3^k - q2^k - 2^k| \geq 2^k \cdot e^{-\varepsilon k}$

$3^k = 2^k q + r \Rightarrow |r - 2|^k \geq 2^k \cdot e^{-\varepsilon k} \Rightarrow |r - 2^k| \geq 2^k \frac{1}{e^{\log(4/3)^k}}$

$\varepsilon < \log(4/3)^k$ seçilirse

Book: Schmit — Diophantane Approximation
Van Leveque — Topics in Number Theory

$$|r - 2^k| \geq \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$2^k - r \geq \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow 2^k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \geq r$$

Böylelikle Pillai-Dickson bulmuş oluruz.

Ayrıca, D.M Stimmler, 1964 yılında $2 \leq k \leq 200000$ değerleri için Pillai-Dickson koşulunu sağlandığını gösteriyor.

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2$$

$k < 471600000$, Kubina ve Wunderlich (1989).

ABC Sanısı (Masser ve Osterle) Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $k(\epsilon) > 0$ sayısı var ki ($k(\epsilon)$ hesaplanabilir, Roth-Ridout kullanılan k'ya sınır değer veremiyoruz.) eğer a, b, c tam sayıları aralarında asal ve $a + b = c$ ise

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq k(\epsilon)\left(\prod_{p \mid abc} p\right)^{1+\epsilon}$$

eşitsizliği sağlanır.

Amacımız: ABC sanısı ile $\forall k \geq 2$ için $g(k) = 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$ olduğunu ispatlamak.

Bu amaç için $r \leq 2^k - q - 3$ olduğunu göstererek Pillai-Dickson teoreminden sonuca ulaşacağız.

$m \geq 3$ olmak üzere $A^m + B^m = C^m$ olsun. $\max\{A^m, B^m, C^m\} \leq k(\epsilon)\left(\prod_{p \mid (ABC)^m} p\right)^{1+\epsilon}$

burada $C^m \leq k(\epsilon)(C^3)^{1+\epsilon} = k(\epsilon) \cdot C^{3+3\epsilon}$

a tam sayı için $N(a) = rad(a) = \prod_{p \mid a} p$

$w(a) = a$'nın farklı asal çarpanların sayısı

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} N(1) = 1 \\ w(1) = 0 \end{array}$

Ideal Waring Sanısı: $k \geq 2$ için $g(k) = 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$

Kaynaklar: Shanta Laishram'ın (2012) (Acta Arit), (2015) (Ramanujan)

Kesin ABC sanısı: a,b,c ikili aralarında asal ve $a+b=c$ eşitliğini sağlayan pozitif tam sayılar ise

$$c \le \frac{6}{5} N(abc) \cdot \frac{(\log N(abc))^{\omega(N)}}{\omega(N)!}$$

sağlanır.

Theorem. (Laishram, Shorey, 2012). Kesin ABC sanısı kabul edildiğinde a,b,c aralarında asal pozitif tam sayı, $a+b=c$ sağlansın. Bu durumda $c \le N(a,b,c)^{1+3/4}$ eşitsizliği sağlanır. Eğer $\epsilon \in [0, 3/4]$ değeri için öyle $\omega_\epsilon(\varepsilon/N)$ değeri var ki

$$N(abc) \geq N_\epsilon = \prod_{p \le p_{\omega_\epsilon}} p$$

sağlandığı zaman $c < k_\epsilon \cdot N^{1+\epsilon}$ eşitsizliği $k_\epsilon \le \frac{6}{5\sqrt{2\pi\omega_\epsilon}}$ değeri için sağlanır.

İspat. $3^k = 2^k \cdot q + r$, $q = \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor$ olsun. $r \le 2^k - q - 3$ koşulunun $2 \le k \le 471600000$ için sağlandığını biliyoruz. Şimdi $k > 471600000$ ve $r \geq 2^k - q - 2$ olduğunu kabul edelim.

$$3^k = 2^k q + r = 2^k(q+1) - (2^k - r)$$

$$3^k + (2^k - r) = 2^k(q+1)$$

Şimdi 3^k ve $2^k(q+1)$'nın ebobu $3^m = (3^k, 2^k(q+1))$ olsun. Böylece,

$$\underbrace{3^{k-u}}_{a} + \underbrace{3^{-u}(2^k - r)}_{b} = \underbrace{3^{-u} \cdot 2^k (q+1)}_{c}$$

$$b = 3^{-u}(2^k - r) < 3^{-u}(2^k - (2^k - q - 3)) = \frac{q+3}{3^u}$$

$$N(abc) = N\left(3^{k-u} \, \frac{2^k (q+1)}{3^u} \cdot b\right) \le 3 \cdot 2 \, \frac{q+1}{3^u} \cdot b \le \frac{b(q+1)(q+3)}{3^{2u}}$$

Şimdi $N < e^{63727}$ olduğunu kabul edelim. O halde Leisham–Shorey Teoriminden

$$2^k \le 2^k \frac{(q+1)}{3^u} < N(abc)^{1+3/4} \le (e^{63727})^{7/4}$$

$$\Rightarrow k \le \frac{63727 \cdot 7}{4 \log 2} < 160893$$

elde edilir. $\lightning$ $k \geq 471600000$

O halde $N > e^{63727}$ olsun. $\epsilon = 1/3$ alınırsa, Leishram-Shorey teoreminden

$$c = \frac{2^k(q+1)}{3^u} \leq \frac{6}{5\sqrt{2\pi 6460}} \left(\frac{6(q+1)(q+3)}{3^{2u}} \right)^{1+\frac{1}{3}}$$

$$2^k < \frac{3^u}{q+1} \frac{6^{7/3}}{5\sqrt{12930\pi}} (q+1)^{1+1/3} (q+3)^{4/3}$$

$$2^k < \frac{6^{7/3}}{5\sqrt{12930\pi}} \left(\frac{(q+1)^{1/3}(q+3)^{4/3}}{3^{5u/3}} \right)$$

$$\leq (q+3)^{5/3} \iff \left(\frac{q+1}{q+3} \leq 3^{5u} \text{ holds} \right)$$

$$2^k < \frac{6^{7/3}}{5\sqrt{12930\pi}} (q+3)^{5/3} = \frac{6^{7/3}}{5\sqrt{12930\pi}} q^{5/3} \left(1+\frac{3}{q}\right)^{5/3}$$

$3^k > 2^k \cdot q \Rightarrow q < \left(\frac{3}{2}\right)^k$ $k \geq 3$ olduğundan $1 + \frac{3}{q} < 2$, eşitsizliği sağlanır.

$$2^k < \frac{6^{7/3}}{5\sqrt{12930\pi}} \left(\frac{3}{2}\right)^{5k/3} 2^{3/3} < \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{5/3} \right)^k < 2^k \quad \lightning$$

O halde Waring Sanısı (J. A. Euler sanısı) doğru. $\square$

<u>Exercise</u>. Let $\epsilon > 0$. Show that for sufficiently large N,

$$\frac{(\log N)^{\log\log N}}{[\log\log N]!} \ll_{\epsilon} N^{\epsilon}$$

Kesin ABC, ABC' den daha kuvvetli olduğunu göstermek istiyoruz.

Not. (1940 yılında Linnick kısa daha anlaşılır bir şekilde kanıtlıyor) ve bugün Linnick'in yaptığını göreceğiz. Linnick ispatının temel taşlarından biri Schnirelmann Yoğunluğu ve Schnirelmann Goldbach sanısını çözmek için tanımlıyor. (Sieve theorem'inden geliyor)

Landau (1912): Her pozitif tam sayı ≥ 2 en fazla c tane asalın toplamı şeklinde yazabilmesini sağlayan c tam sayısı var mıdır?

Schnirelmann Landau'nun sanısını ispatlıyor ve $c < 800\,000$ olduğunu gösteriyor.

Tanım. $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ için $A(n) := \#\{a \in A : a < n\}$.

$\delta(A) = \inf\limits_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n}$ olarak Schnirelmann yoğunluğu tanımlanır.

$$\delta(2\mathbb{N}) = 0, \quad \bar{d}(2\mathbb{N}) = 1/2$$

Gözlem.

1. $\delta(A) \leq \frac{|A|}{n}$ ve $n \cdot \delta(A) \leq |A|$
2. $\delta(A) = 1 \iff A = \mathbb{N}$.

Tanım. A, B iki alt küme, $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

$$A \oplus B = (A \cup \{0\}) + (B \cup \{0\})$$

ve $m \in \mathbb{N}$ için $mA := \bigoplus_{i=1}^{m} A$.

$k \geq 2$ için $A_k = \{n^k \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesini ele alalım. O zaman

Waring Sanısı $\equiv \exists g(k) \in \mathbb{N}$ $\underbrace{gA_k = \mathbb{N}}$ sağlanır mı?

$\equiv \delta(gA_k) = 1$?

Theorem 5.1. $A, B \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(A \oplus B) \geq \delta(A) + \delta(B) - \delta(A)\delta(B)$$

sağlanır.

Theorem 5.2. $A_1, A_2, \ldots, A_t \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta\left(\bigoplus_{i=1}^{t} A_i\right) \geq 1 - \prod_{i=1}^{t} (1 - \delta(A_i))$$

eşitsizliği geçerlidir.

(İspat tüme varım metoduyla yapılır.)

Lemma 5.3. $B \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere ve eğer $\delta(B) > 1/2$ ise $\delta(2B) = 1$

yani $2B = \mathbb{N}$.

$$A_k = \{n^k \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \delta(A_k) \leq \bar{d}(A_k) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|A_k \cap [1,n]|}{n}$$

Therefore, $\delta(A_k) \leq \frac{n^{1/k}}{n} \to 0$

Amacımız: $\exists g_1 \in \mathbb{N}$ var mı ki $\delta(g_1 A_k) > 1/2$.

Theorem 5.4. $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere, $\delta(A) > 0$ ise $\exists m \in \mathbb{N}$ var ki $\delta(mA) = 1$ sağlanır.

(İspat: Theorem 5.2 kullanarak $\delta(mA) > 1/2$ olacak şekilde m bul, sonra Lemma 5.3'ü kullanarak istenilen sonuca ulaş)

Böylece,

Waring Sanısı $\equiv \exists m \in \mathbb{N}$ var mı ki $\delta(mA_k) > 0$ olsun.