Sadık Eyidoğan

Ramsey Teorisi ve Ultrafiltreler

Kaynak. Hindman & Strauss Algebra in the Stone-Cech Compactification. (s-4-5)

Amaç. Ramsey kuramındaki ultrafiltreler cinsinden ifade etmek ve ispatlamak.

Ultrafiltreler $\xrightarrow[\text{Compactification}]{\text{Stone-Cech}}$ X top. uzay (Tychonoff uzay) ayrık topoloji.

$\mathbb{N}$ kümesini ($\mathbb{N}$(sayılabilir) ayrık topolojik uzak $\quad X \overset{i}{\hookrightarrow} \beta X$

$(\mathbb{N}, \cdot) \hookrightarrow (\beta\mathbb{N}, \cdot)$ (yarı grup).

Filtreler.

Topolojik özellikler filtreler ve ağlar ile karakterize edilebilir.

Tanım. X boştan farklı bir küme olsun ve $\mathcal{F}$, X'nin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

iii. $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{F}$ özellikleri sağlanıyor ise $\mathcal{F}$'ye X üzerinde bir filtre denir.

Örnek.

i. $X \neq \emptyset$ ise $\mathcal{F} = \{X\}$

ii. $X \neq \emptyset$ ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun, $\mathcal{F}_A := \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}$

iii. X sonsuz bir küme olmak üzere X'deki tümleyeni sonlu kümelerin oluşturduğu küme ailesi X üzerinde bir filtre tanımlar. Bu filtreye Frechet filtresi denir.

iv. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{N}(x) = \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{T}, \underset{x \in B}{B \subseteq A}\}$ filtre

X kümesi üzerindeki bütün filtrelerin kümesini düşünelim. $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \iff \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ sıralaması tanımlanabilir.

Tanım. $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{U}$, X üzerinde bir filtre olsun. Eğer $\mathcal{U}$'yu veren başka bir filtre yoksa $\mathcal{U}$'ya ultrafiltre denir.

Sonlu kesişim özelliği. $\mathcal{A}$ küme ailesi olmak üzere, $\mathcal{A}$'da boştan farklı sonlu tane kümenin kesişimi boştan farklı ise $\mathcal{A}$'ya sonlu kesişim özelliğini sağlar.

Gösterim: $X \neq \emptyset$ olsun. $\mathcal{P}_f(X)$ gösterimi, X tüm sonlu alt kümelerinin kümesi.

$$\mathcal{P}_f(\mathcal{P}(X)) = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : |\mathcal{A}| < \infty\}$$

Teorem. $X \neq \emptyset$ küme ve $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a. $\mathcal{U}$ bir ultrafiltre

b. $\mathcal{U}$ sonlu kesişim özelliğini sağlar ve her bir $A \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{U}$ için $\exists B \in \mathcal{U}$ var ki $A \cap B = \emptyset$ sağlanır.

c. $\mathcal{U}$ sonlu kesişim özelliğine göre maksimal bir küme ailesi.

d. $\mathcal{U}$, X üzerinde bir ultrafiltre, ve $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{P}(X))$ ol. üzere $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{U}$ ise $\mathcal{D} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Yani $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{P}(X)$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{U}$ ise $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ için $D_i \in \mathcal{U}$ olmalıdır.

e. $\mathcal{U}$ ve X üzerinde bir filtre ve her $A \subseteq X$ için $A \in \mathcal{U}$ ya da $A^c \in \mathcal{U}$ sağlanır.

Tanım. $x \in X$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{A \subseteq X : x \in A\}$ küme ailesine x'in ürettiği esas ultrafiltre denir.

Teorem. X bir bir küme ve $\mathcal{U}$, X üzerinde bir ultrafiltre olsun. Aşağıdakiler denktir.

a. $\mathcal{U}$ esas ultrafiltre

b. $\exists A \in \mathcal{P}_f(X)$ var ki $A \in \mathcal{U}$.

c. $\{A \subseteq X : X \setminus A \text{ sonlu}\}$ kümesi $\mathcal{U}$ tarafından içerilemez.

d. $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$

e. $\exists x \in X$ için $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.

Note that Esas olmayan bir $\mathcal{U}$ ultrafiltresi için $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$. Ultrafiltreler sonlu küme içerdiği anda esas ultrafiltre olur.

Teorem. X bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ küme ailesi sonlu kesişim özelliğini sağlasın. Bu durumda X üzerindeki $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ ultrafiltresi mevcuttur.

İspat. $\Gamma = \{\mathcal{B} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}$ sonlu kesişim özelliğine sahiptir.$\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{A} \in \Gamma$ olduğundan boştan farklı Γ kümesi, $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2 \iff \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ kısmi sıralı yapılabilir. $\mathcal{G}$, Γ üzerinde zincir olsun. $\bigcup \mathcal{G}_i$ kümesi sonlu kesişim özelliğini sağladığını gösterelim. $A_1, A_2, \dots, A_k \in \bigcup \mathcal{G}_i$ olsun. $\exists i$ için $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{G}_i$'ye düşeceğinden (zincir olma özelliğinden) ve $\mathcal{G}_i$'de sonlu kesişim özelliğini sağladığından $\bigcap_{j=1}^{k} A_j \neq \emptyset$. O halde üst sınır mevcut olduğundan Zorn Lemmasından Γ'nın maksimal elemanı mevcuttur. Bir önceki theorem c.'den dolayı $\mathcal{U}$ ultrafiltredir.

X Tychnoff topolojik uzayı olsun.

(kapalı bir A kümesi ile A'nın dışındaki her bir noktayı ayıran sürekli sınırlı fonksiyon)

Öyle bir Y kompakt Hausdorff topolojik uzayı var mı ki X'i yoğun olacak şekilde içersin

Stone-Cech Kompaktlaması: Öyle bir $(\beta X, i)$ kompakt Hausdorff uzay

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\text{sürekli}"] & \beta X \arrow[dl, "\exists ! f"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

$\exists ! f$ sürekli genişlemesi mevcuttur.

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{B} \subseteq A$ ise $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$

Amaç: D ayrık bir uzay için Stone-Cech kompaktlamasını inşa etmek.

Tanım. D ayrık topolojik uzay olmak üzere

a. $\beta D := \{ p \mid p,\ D \text{ üzerinde ultrafiltre} \}$

b. $A \subseteq D$ olmak üzere $\hat{A} = \{ p \in \beta D \mid A \in p \}$

c. $a \in D$ olmak üzere $e(a) = \{ A \subseteq D \mid a \in A \}$ esas ultrafiltre olsun.

Lemma. $D \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, $A, B \subseteq D$ olsun.

i. $(\widehat{A \cap B}) = \hat{A} \cap \hat{B}$ (baz olacağını)

ii. $(\widehat{A \cup B}) = \hat{A} \cup \hat{B}$ (kapalı küm. baz olacağını)

iii. $(\widehat{D \setminus A}) = \beta D \setminus \hat{A}$ (kapacık)

iv. $\hat{A} = \emptyset \iff A = \emptyset$

v. $\hat{A} = \beta D \iff A = D$

vi. $\hat{A} = \hat{B} \iff A = B$

Kanıt.

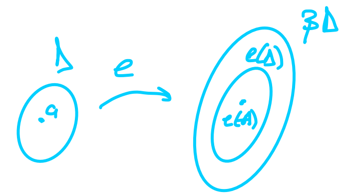
i. $p \in (\widehat{A \cap B})$ olsun. $p \in (\widehat{A \cap B}) \iff A \cap B \ni p$ yazılır. $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan p'nin filtre oluşundan $A, B \in p$ olmalıdır. Buradan $p \in \hat{A}$ ve $p \in \hat{B}$. Tersine $p \in \hat{A} \cap \hat{B}$ olsun. Tanımdan $A, B \in p$ olur p'nin filtre olduğundan $A \cap B \in p$ $\Rightarrow p \in \widehat{A \cap B}$

iii. $p \in (\widehat{D \setminus A})$ olsun. $D \setminus A \in p$ yazılır. Buradan $A \notin p \Rightarrow p \in \beta D \setminus \hat{A}$ yazılır. Tersine $p \in \beta D \setminus \hat{A}$ olsun. $A \notin p$ yazılır ve p'nin ultrafiltre oluşundan $A^c \in p \Rightarrow p \in (\widehat{D \setminus A})$ söyler.

iv. $\emptyset \neq A \subseteq D$ olsun. $\mathcal{F}_A = \{ B \subseteq D \mid A \subseteq B \}$ filtre olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}_A \subseteq p$ ultra filtresi mevcut. $p \in \hat{A}$ olur. $\hat{A} \neq \emptyset \Rightarrow p \in \hat{A} \Rightarrow A \in p$ olup $\hat{A} \neq \emptyset$ olurdu.

$\square$

Son lemma $\beta\Delta$ üzerinde $\hat{A}$'ları baz kabul eden topolojik uzay mevcut olduğunu söyler.
Bu topolojik uzayı $(\beta\Delta, \hat{\mathcal{T}})$ olarak gösterelim.



Teorem. $\Delta \neq \emptyset$ olmak üzere

a. $(\beta\Delta, \hat{\mathcal{T}})$ topolojisi kompakt ve Hausdorff'dur

b. $\hat{A}$ formundaki kümeler $\beta\Delta$'nin kapacık kümelerdir.

c. Her $A \subseteq \Delta$ için $\hat{A} = Cl_{\beta\Delta}\, e[A]$, $e[A] = \{e(a) : a \in A\}$

d. $A \subseteq \Delta$ ve $p \in \beta\Delta$ olmak üzere $p \in Cl_{\beta\Delta}\, e[A] \iff A \in p$ dir.

e. $e : \Delta \hookrightarrow \beta\Delta$ dönüşümü 1-1 ve $e[\Delta]$, $\beta\Delta$'nin yoğun bir alt kümesidir. Ayrıca, $e[\Delta]$'nin elemanları $\beta\Delta$'nin tam olarak izole (ayrık) elemanlarıdır.

f. $\mathcal{U} \subseteq \beta\Delta$ açık bir küme ise $Cl_{\beta\Delta}\mathcal{U}$ kümeside açıktır.

İspat.

a. (Hausdorff) $p, q \in \beta\Delta$ ayrık noktalar. $A \in p \setminus q$ olacak şekilde $A \subset \Delta$ kümesi mevcut. Yani $A \in p \iff p \in \hat{A}$ ve $A \notin q$'dır. q ultrafiltre olduğundan $A^c \in q \iff q \in \hat{A^c}$. Buradan p ve q'nun $\hat{A}$ ve $q \in \beta\Delta \setminus \hat{A}$, $\hat{A^c}$ ayrık açık komşuluklar olduğu görülür.

(Kompaktlık) Bunun için $\beta\Delta$'nin sonlu kesişim özelliğini sağlayan kapalı kümelerin kesişiminin boştan farklı olduğunu göstermem yeterli. Şimdi $\beta\Delta$'de sonlu kesişim özelliğini sağlayan kapalı kümeler ailesi verilsin.

Gözlem: $\hat{A}$ formundaki kapalı kümeler içinde bir bazdır. ($K \subseteq \beta\Delta$ kapalı $\Rightarrow K^c = \bigcup \hat{A} \Rightarrow K := \bigcup \hat{A}$) O halde $\mathcal{A}$, $\hat{A}$ formundaki kümelerden oluşan ve sonlu kesişim özelliğini sağlayan bir aile olsun.

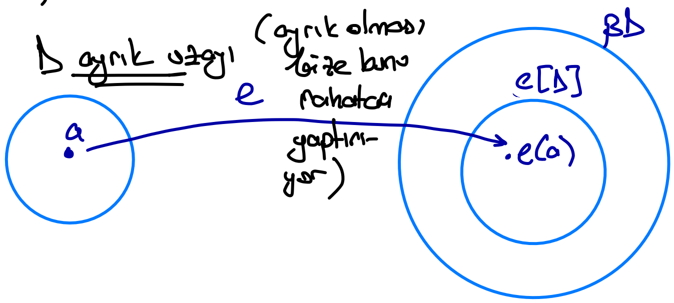
$$\mathcal{A} = \{\hat{A} : A \subset \Delta\} \quad \text{ise} \quad \mathcal{B} := \{A \subseteq \Delta : \hat{A} \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{B}$'nin sonlu kesişim özelliğini sağladığı açıktır. $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \{\hat{A_i}\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{A}$
$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \hat{A_i} \neq \emptyset$ S.K.Ö'den dolayı $\Rightarrow \widehat{\bigcap A_i} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$, o zaman yukarıdaki teoremden $\mathcal{B} \subseteq q$ ultrafiltre mevcut. O zaman $q \in \bigcap \mathcal{A}$ olmalı. ($q \notin \hat{A} \Rightarrow A \notin q$
$\Rightarrow A \notin q \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq q$ çelişkisi durdu.)

e. $e : \Delta \hookrightarrow \beta\Delta$ dönüşümü $(a \mapsto e(a))$ 1-1'dir. a ve b, Δ'nın farklı iki noktası
$a \in \Delta \setminus \{b\} \Rightarrow \Delta \setminus \{b\} \in e(a)$ olup $\Delta \setminus \{b\} \notin e(b)$. O halde $e(a) \neq e(b)$.
$e[\Delta]$, $\beta\Delta$'de yoğundur. $\hat{A}$ kümesi temel açık olsun $(\hat{A} \neq \emptyset)$ $a \in A$ mevcut $A \in e(a)$

$\Rightarrow e(a) \in e[D] \cap \hat{A} \neq \emptyset$. $e(D)$, βD'de yoğundur.

$p \in \beta D$ ve $\{p\}$ açık kümesi olsun. $e[D]$, βD'de yoğun olduğundan $e[D] \cap \{p\} \neq \emptyset$ olmalı $\Rightarrow p \in e[D]$ olacaktır.



(Topolojik olarak Tychonoff uzayıyla ilgileniyordik)

$cl_{\beta D}\, e[D] = \beta D$ $\quad (\beta D, \tilde{\mathcal{T}})$ topolojik uzayına D'nin Stone-Cech kompaktlaması denir.

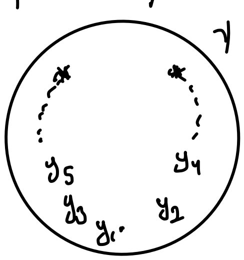
$\square$

Y kompakt topolojik uzayı olsun. $x_n \subset Y$ bir dizi olmak üzere $\lim x_n$ mevcut olmak zorunda değil. Y kompakt uzay olduğundan x_n'nin yakınsak bir altdizisi mevcut olmalı.

Soru: Y kompakt Haussdorff olsun. Y'nin üzerinde öyle bir yakınsaklık tanımlayabilir miyiz ki bütün diziler yakınsak olsun? Ayrıca Y'deki topolojik yakınsaklığa da saygı göstermeliyiz. Burada demek istediğimiz şey $\lim^* x_n$ yeni yakınsaklığımız olsun, eğer topolojik olarak $\lim x_n = x$ ise $\lim^* x_n = x$ olmalı.)

Ultrafiltreye Göre Limit

Tanım. Y kompact Haussdorff topolojik uzay olsun. $f: \mathbb{N} \to Y$ dizisi ve $p \in \beta\mathbb{N}$ verilsin. Bir $y \in Y$ için y'nin her U açık komşuluğu için $f^{-1}(U) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in U\} \in p$ ise f dizisinin p ultrafiltresine göre limiti denir ve $\lim\limits_{n \to p} f(n) = y$ şeklinde gösterilir.



$\lim\limits_{n \to p} f(n)$

p esas ultrafiltresi değilse $f(n)$'nin limit noktalarından seçer.

$p = e(m)$ $\quad \lim\limits_{n \to p} f(n) = f(m)$ olacak şekilde davranır. Şimdi bu limitin varlığını göstermemiz gerekiyor.

İspat. Y kompakt Haussdorff topolojik uzayı, $f: \mathbb{N} \to Y$ dizisi ve $p \in \beta\mathbb{N}$ ultrafiltresi verilsin. Şimdi p yardımıyla Y üzerinde ultrafiltre tanımlayalım:

$$\tilde{f}(p) = \{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in p \}$$

Öncelikle
- $\emptyset \notin \tilde{f}(p)$ olduğunu göstermeliyiz.
- $U, V \in \tilde{f}(p)$ olsun. Tanımdan $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in p$ olurdu. p ultrafiltre olduğundan $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \in p$, yani $U \cap V \in \tilde{f}(p)$ olur.

• $U \in \tilde{f}(p)$ ve $U \subseteq V$ olsun. Tanımdan $\tilde{f}(U) \in p$ ve $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$ olduğunu kullanırsak (p ultrafiltre) $f^{-1}(V) \in p$. Buradan da $V \in \tilde{f}(p)$ yazılır.

Dolayısıyla $\tilde{f}(p)$ bir filtredir. $U \subseteq Y$ altkümesi verilsin. $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{N}$ olup p ultrafiltre olduğundan $f^{-1}(U) \in p$ ya da $(f^{-1}(U))^c \in p$ olmalıdır. $(f^{-1}(U))^c = f^{-1}(U^c)$. Buradan da $U \in \tilde{f}(p)$ ya da $U^c \in \tilde{f}(p)$ elde edilir. Şimdi f dizisinin limitini belirleyelim.

$\bigcap \{U \subseteq Y : U \in \tilde{f}(p)$ ve U kapalı$\}$ kümesini tanımlayalım. Y topolojik uzayı kompakt olduğundan ve $\{U \subseteq Y : U \in \tilde{f}(p)$ ve U kapalı$\}$ küme ailesi sonlu kesişim özelliğini sağladığından yukarda tanımladığım küme boş olamaz. Şimdi, $y \in \bigcap \{U \subseteq Y : U \in \tilde{f}(p)$ ve U kapalı$\}$ olmak üzere $\lim_{n \to p} f(n) = y$ dir. y'nin keyfi V açık komşuluğu verilsin. $f^{-1}(V) \notin p$ olsun. Bu durumda $V \notin \tilde{f}(p)$ yazılır. $\tilde{f}(p)$ ultrafiltre olduğundan $V^c \in \tilde{f}(p)$ ve V^c kapalıdır. y'nin tanımından ve $y \in V^c$ çelişkisi ortaya çıkar. O halde $\lim_{n \to p} f(n) = y$'dir.

(Teklik) $\lim_{n \to p} f(n) = y$ ve $\lim_{n \to p} f(n) = y^*$ olsun. $y \in U_1$ ve $y^* \in U_2$ ayrık komşulukları mevcut. $\tilde{f}(p)$ ultrafiltre olduğundan U_1 ya da U_1^c ve U_2 ya da U_2^c $\tilde{f}(p)$'de olmalı. U_1^c ve U_2^c kapalı olduğundan $\tilde{f}(p)$'de olamaz. Hangisi varsa diğeri için $y_j \in U_1^c$ çelişkisi oluşur. O halde U_1 ve U_2 $\tilde{f}(p)$'de olmalıdır. Bu ise $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ çelişkisini ortaya çıkarır.

Missed a class

Tanım. $\mathcal{G}$ (ilgi duyduğumuz, Ayrık bir uzayda) kümeler ailesi olsun. Keyfi, $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ parçalanışı için $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ var ki $G \subseteq C_i$ olacak şekilde $G \in \mathcal{G}$ vardır.

Teorem. $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{G}$ ilgi duyulan kümeler ailesi olsun.

- $\mathcal{G}$ düzenli bir parçalanış.
- $\exists p$ ultrafiltre mevcut olup, $\forall A \in p$ için $G \subseteq A$ olacak şekilde $G \in \mathcal{G}$ vardır.

Örnek. $\mathcal{G} = \{a, a+b, \dots, a+(k-1)b \mid a, b \in \mathbb{N}\ b>0\}$

Van der Waerden's Theorem.

Verilen k ve r pozitif degerleri olmak üzere $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ parcalanısı icin $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ C_i kümesi k-AP icerir ($G \subseteq C_i$). $\{a, a+b, \dots, a+(k-1)b\} = G$.

$\Rightarrow$ Öyle bir p ultrafiltresi var mı ki $\forall A \in p$ icin A kümesi aritmetik zengin olsun. $AP_k = \{ p \in \beta\mathbb{N} \mid \forall A \subset p$ icin k-AP $\subset A \}$. Buradan $AP_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} AP_k$ kümesi oluşturduk. Van der Waerden's Theoremi $\Longleftrightarrow$ $AP_\infty \neq \emptyset$ $\forall k$ icin AP_k kapalı $AP_{k+1} \subset AP_k$. $\forall t$ icin $AP_t \neq \emptyset$ gösterirsek $\beta\mathbb{N}$ kompakt olmasından $AP_\infty \neq \emptyset$ olduğunu söyleriz.

Sonlu V.d.W's Theorem. Verilen her k ve r pozitif degerleri icin öyle bir $N(r,k)$ var ki $[1, N(k,r)] = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, keyfi parcalanısı icin $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ var ki C_i kümesi k-AP icerir.

Teorem. (Sonlu VdW) $\Longleftrightarrow$ VdW

İspat.